Ocena komponenti varijansi

2022

Uvod

Uvod

Ocena genetskih parametara je važno pitanje u uzgoju životinja.

Uvod

Ocena genetskih parametara je važno pitanje u uzgoju životinja.

- Prvo, ocena aditivnih i neaditivnih genetskih varijansi utiče na bolje razumevanje genetskog mehanizma.

Uvod

Ocena genetskih parametara je važno pitanje u uzgoju životinja.

- Prvo, ocena aditivnih i neaditivnih genetskih varijansi utiče na bolje razumevanje genetskog mehanizma.
- Drugo, ocena genetskih i fenotipskih varijansi i kovarijansi je esencijalna u predviđanju parametara uzgoja kao i za predviđanje genetskog sklopa naslednika.

Uvod

Ocena genetskih parametara je važno pitanje u uzgoju životinja.

- Prvo, ocena aditivnih i neaditivnih genetskih varijansi utiče na bolje razumevanje genetskog mehanizma.
- Drugo, ocena genetskih i fenotipskih varijansi i kovarijansi je esencijalna u predviđanju parametara uzgoja kao i za predviđanje genetskog sklopa naslednika.
- Parametri koji nas interesuju su heritabilnost, genetska i fenotipska korelacija i ponovljivost i oni su u funkciji komponenti varijanse.

Uvod

Ocena genetskih parametara je važno pitanje u uzgoju životinja.

- Prvo, ocena aditivnih i neaditivnih genetskih varijansi utiče na bolje razumevanje genetskog mehanizma.
- Drugo, ocena genetskih i fenotipskih varijansi i kovarijansi je esencijalna u predviđanju parametara uzgoja kao i za predviđanje genetskog sklopa naslednika.
- Parametri koji nas interesuju su heritabilnost, genetska i fenotipska korelacija i ponovljivost i oni su u funkciji komponenti varijanse.
- Ocena komponenti varijanse se odvija unutar i između familija.

ANOVA algoritam

ANOVA algoritam

Za ocenu komponenti varijanse koriste se sume kvadrata i stepeni slobode. Posmatrajmo model sa jednim efektom α_i (efekat oca)

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

gde je y_{ij} posmatranje na j-toj ćerki i-tog oca.

ANOVA algoritam

Za ocenu komponenti varijanse koriste se sume kvadrata i stepeni slobode. Posmatrajmo model sa jednim efektom α_i (efekat oca)

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

gde je y_{ij} posmatranje na j-toj ćerki i-tog oca.

Neka je ukupno N posmatranja, s je broj očeva i $N/s = n$ broj ćerki po ocu. Neka je

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_{ij}}{n}, \quad \bar{\bar{y}} = \frac{\sum_{i=1}^{s} \bar{y}_i}{s}.$$

ANOVA algoritam

Za ocenu komponenti varijanse koriste se sume kvadrata i stepeni slobode. Posmatrajmo model sa jednim efektom α_i (efekat oca)

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

gde je y_{ij} posmatranje na j-toj ćerki i-tog oca.

Neka je ukupno N posmatranja, s je broj očeva i $N/s = n$ broj ćerki po ocu. Neka je

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_{ij}}{n}, \quad \bar{\bar{y}} = \frac{\sum_{i=1}^{s} \bar{y}_i}{s}.$$

Sada je suma kvadrata totala jednaka

$$SST = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{\bar{y}})^2$$

koja se može napisati i kao

$$SST = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}_i + \bar{y}_i - \bar{\bar{y}})^2.$$

ANOVA algoritam

ANOVA algoritam

odnosno

$$SST = \underbrace{\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2}_{SSE} + \underbrace{2\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y}_i)(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}})}_{0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}})^2}_{SSA}$$

SSA je suma kvadrata efekta, dok je SSE suma kvadrata greške.

odnosno

$$SST = \underbrace{\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2}_{SSE} + \underbrace{2\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y}_i)(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}})}_{0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}})^2}_{SSA}$$

SSA je suma kvadrata efekta, dok je SSE suma kvadrata greške.
Ocene komponenti varijanse su

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 = SSE/(N - s)$$

i

$$\hat{\sigma}_{\alpha}^2 = (SSA/(s - 1) - \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2)/n.$$

Hendersonov algoritam 3

Hendersonov algoritam 3

- U ovom algoritmu se zamenjuju sume kvadrata iz ANOVA algoritma sa izrazima koji uključuju rešenja jednačina najmanjih kvadrata.

Hendersonov algoritam 3

- U ovom algoritmu se zamenjuju sume kvadrata iz ANOVA algoritma sa izrazima koji uključuju rešenja jednačina najmanjih kvadrata.
- Ignorišu se veze između slučajnih faktora i svi faktori su fiksni.

Hendersonov algoritam 3

- U ovom algoritmu se zamenjuju sume kvadrata iz ANOVA algoritma sa izrazima koji uključuju rešenja jednačina najmanjih kvadrata.
- Ignorišu se veze između slučajnih faktora i svi faktori su fiksni.

Posmatrajmo model

$$y = X\beta + Z\alpha + \varepsilon$$

gde su y, β, α i ε vektor posmatranja, vektor fiksnih efekata, vektor slučajnih efekata i vektor greške, redom. X i Z odgovarajuće dobro poznate matrice. Pretpostavljamo da je $Var(\alpha) = \sigma_\alpha^2 I$ i $Var(\varepsilon) = \sigma_\varepsilon^2 I$ i $Cov(\alpha, \varepsilon) = 0$.

Hendersonov algoritam 3

- U ovom algoritmu se zamenjuju sume kvadrata iz ANOVA algoritma sa izrazima koji uključuju rešenja jednačina najmanjih kvadrata.
- Ignorišu se veze između slučajnih faktora i svi faktori su fiksni.

Posmatrajmo model

$$y = X\beta + Z\alpha + \varepsilon$$

gde su y, β, α i ε vektor posmatranja, vektor fiksnih efekata, vektor slučajnih efekata i vektor greške, redom. X i Z odgovarajuće dobro poznate matrice. Pretpostavljamo da je $Var(\alpha) = \sigma_\alpha^2 I$ i $Var(\varepsilon) = \sigma_\varepsilon^2 I$ i $Cov(\alpha, \varepsilon) = 0$.

LS jednačine su tada

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix}$$

Hendersonov algoritam 3

- U ovom algoritmu se zamenjuju sume kvadrata iz ANOVA algoritma sa izrazima koji uključuju rešenja jednačina najmanjih kvadrata.
- Ignorišu se veze između slučajnih faktora i svi faktori su fiksni.

Posmatrajmo model

$$y = X\beta + Z\alpha + \varepsilon$$

gde su y, β, α i ε vektor posmatranja, vektor fiksnih efekata, vektor slučajnih efekata i vektor greške, redom. X i Z odgovarajuće dobro poznate matrice. Pretpostavljamo da je $Var(\alpha) = \sigma_\alpha^2 I$ i $Var(\varepsilon) = \sigma_\varepsilon^2 I$ i $Cov(\alpha, \varepsilon) = 0$.

LS jednačine su tada

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix}$$

koje se svode na

$$Z'MZ\hat{\alpha} = Z'My \text{ za } M = I - X'(X'X)^{-1}X'.$$

Hendersonov algoritam 3

Hendersonov algoritam 3

Ocene komponenti varijanse su

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 = \frac{y'y - \hat{\alpha}'Z'y - \hat{\beta}'X'y}{(N - \mathrm{rang}(X) - \mathrm{rang}(Z) + 1)}$$

i

$$\hat{\sigma}_{\alpha}^2 = \frac{\hat{\alpha}'Z'My - (\mathrm{rang}(Z) - 1)\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2}{\mathrm{trag}(Z'MZ)}.$$

Princip maksimalne verodostojnosti

Princip maksimalne verodostojnosti

Pretpostavimo da promanljiva y ima srednju vrednost μ i standardnu devijaciju σ. Normalna raspodela ove promenljive se može prikazati kao $y = N(\mu, \sigma^2)$. Funkcija gustine je tada

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(y-\mu)^2}{\sigma^2}}.$$

Princip maksimalne verodostojnosti

Pretpostavimo da promanljiva y ima srednju vrednost μ i standardnu devijaciju σ. Normalna raspodela ove promenljive se može prikazati kao $y = N(\mu, \sigma^2)$. Funkcija gustine je tada

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(y-\mu)^2}{\sigma^2}}.$$

Ako potražimo funkciju gustine za $y = N(X\beta, V)$ dobijamo

$$f(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{|V|}} e^{-\frac{1}{2}\cdot(y-X\beta)' V^{-1}(y-X\beta)},$$

Princip maksimalne verodostojnosti

Pretpostavimo da promanljiva y ima srednju vrednost μ i standardnu devijaciju σ. Normalna raspodela ove promenljive se može prikazati kao $y = N(\mu, \sigma^2)$. Funkcija gustine je tada

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(y-\mu)^2}{\sigma^2}}.$$

Ako potražimo funkciju gustine za $y = N(X\beta, V)$ dobijamo

$$f(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{|V|}} e^{-\frac{1}{2}\cdot(y-X\beta)' V^{-1}(y-X\beta)},$$

pa se nakon logaritmovanja dolazi do

$$L = \ln f(y) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2} ln|V| - \frac{1}{2}\cdot(y - X\beta)' V^{-1}(y - X\beta).$$

Princip maksimalne verodostojnosti

Pretpostavimo da promanljiva y ima srednju vrednost μ i standardnu devijaciju σ. Normalna raspodela ove promenljive se može prikazati kao $y = N(\mu, \sigma^2)$. Funkcija gustine je tada

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(y-\mu)^2}{\sigma^2}}.$$

Ako potražimo funkciju gustine za $y = N(X\beta, V)$ dobijamo

$$f(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{|V|}} e^{-\frac{1}{2}\cdot(y-X\beta)' V^{-1}(y-X\beta)},$$

pa se nakon logaritmovanja dolazi do

$$L = \ln f(y) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2} ln|V| - \frac{1}{2}\cdot(y - X\beta)' V^{-1}(y - X\beta).$$

Da bi se našao maksimum funkcije $f(y)$, odnosno maksimuma funkcije verodostojnosti, traži se maksimum funkcije L, odnosno parcijalni izvodi po parametrima u kojima tražimo maksimum se izjednače sa nulom.

ML (Maximum Likelihood) i REML (Restricted Maximum Likelihood)

ML (Maximum Likelihood) i REML (Restricted Maximum Likelihood)

ML ocenjivači maksimizuju funkciju verodostojnosti (koja je dobijena iz funkcije gustine). Dobijene ocene nisu nepristrasne, ali imaju manju varijaciju od ocenjivača koji nisu nepristrasni.

ML (Maximum Likelihood) i REML (Restricted Maximum Likelihood)

ML ocenjivači maksimizuju funkciju verodostojnosti (koja je dobijena iz funkcije gustine). Dobijene ocene nisu nepristrasne, ali imaju manju varijaciju od ocenjivača koji nisu nepristrasni.

REML ocenjivači maksimizuju funkciju verodostojnosti nakon korekcije fiksnih efekata.

ML (Maximum Likelihood) i REML (Restricted Maximum Likelihood)

ML ocenjivači maksimizuju funkciju verodostojnosti (koja je dobijena iz funkcije gustine). Dobijene ocene nisu nepristrasne, ali imaju manju varijaciju od ocenjivača koji nisu nepristrasni.

REML ocenjivači maksimizuju funkciju verodostojnosti nakon korekcije fiksnih efekata.

Rešavanjem MME, u ML metodama se gubitak stepena slobode zbog korekcije fiksnih efekata ne uzima u obzir. U REML-u se uzima u obzir ovaj gubitak u stepenu slobode.

ML (Maximum Likelihood) i REML (Restricted Maximum Likelihood)

ML ocenjivači maksimizuju funkciju verodostojnosti (koja je dobijena iz funkcije gustine). Dobijene ocene nisu nepristrasne, ali imaju manju varijaciju od ocenjivača koji nisu nepristrasni.

REML ocenjivači maksimizuju funkciju verodostojnosti nakon korekcije fiksnih efekata.

Rešavanjem MME, u ML metodama se gubitak stepena slobode zbog korekcije fiksnih efekata ne uzima u obzir. U REML-u se uzima u obzir ovaj gubitak u stepenu slobode.

U većini algoritama za dobijanje REML ocena, koriste se iteracije. Postupak počinje zadavanjem početnih vrednosti komponenti varijansi i prekida se kada funkcija verodostojnosti dostigne maksimum.

ML (Maximum Likelihood) i REML (Restricted Maximum Likelihood)

ML ocenjivači maksimizuju funkciju verodostojnosti (koja je dobijena iz funkcije gustine). Dobijene ocene nisu nepristrasne, ali imaju manju varijaciju od ocenjivača koji nisu nepristrasni.

REML ocenjivači maksimizuju funkciju verodostojnosti nakon korekcije fiksnih efekata.

Rešavanjem MME, u ML metodama se gubitak stepena slobode zbog korekcije fiksnih efekata ne uzima u obzir. U REML-u se uzima u obzir ovaj gubitak u stepenu slobode.

U većini algoritama za dobijanje REML ocena, koriste se iteracije. Postupak počinje zadavanjem početnih vrednosti komponenti varijansi i prekida se kada funkcija verodostojnosti dostigne maksimum.

Biće objašnjene dve metode koje omogućavaju dobijanje REML ocena:

- REML ocene korišćenjem EM (Expectation-Maximization) algoritma i
- REML ocene korišćenjem AI (Average Information) algoritma.

REML ocene korišćenjem EM algoritma

REML ocene korišćenjem EM algoritma

- Zahteva parcijalne izvode prvog reda funkcije verodostojnosti.

REML ocene korišćenjem EM algoritma

- Zahteva parcijalne izvode prvog reda funkcije verodostojnosti.
- Daje pozitivne ocene komponenti varijansi kad god su početne vrednosti komponenti pozitivne.

REML ocene korišćenjem EM algoritma

- Zahteva parcijalne izvode prvog reda funkcije verodostojnosti.
- Daje pozitivne ocene komponenti varijansi kad god su početne vrednosti komponenti pozitivne.
- Uključuje veze između slučajnih faktora.

REML ocene korišćenjem EM algoritma

- Zahteva parcijalne izvode prvog reda funkcije verodostojnosti.
- Daje pozitivne ocene komponenti varijansi kad god su početne vrednosti komponenti pozitivne.
- Uključuje veze između slučajnih faktora.
- U svakoj iteraciji su neophodna rešenja MME i trag dela inverzne matrice koja odgovara slučajnim faktorima.

REML ocene korišćenjem EM algoritma

- Zahteva parcijalne izvode prvog reda funkcije verodostojnosti.
- Daje pozitivne ocene komponenti varijansi kad god su početne vrednosti komponenti pozitivne.
- Uključuje veze između slučajnih faktora.
- U svakoj iteraciji su neophodna rešenja MME i trag dela inverzne matrice koja odgovara slučajnim faktorima.
- Algoritam se zaustavlja kada je razlika između izračunatih ocena komponenata varijasi manja od unapred zadatog broja.

REML ocene korišćenjem EM algoritma

REML ocene korišćenjem EM algoritma

Korak 1. Odredi se matrica srodstva A.

REML ocene korišćenjem EM algoritma

Korak 1. Odredi se matrica srodstva A.

Korak 2. Zadaju se početne vrednosti varijansi σ_ε^2 i σ_α^2, postavi se brojač $k = 0$ i definiše

$$\theta_0 = \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 \\ \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix}.$$

REML ocene korišćenjem EM algoritma

Korak 1. Odredi se matrica srodstva A.
Korak 2. Zadaju se početne vrednosti varijansi σ_ε^2 i σ_α^2, postavi se brojač $k = 0$ i definiše

$$\theta_0 = \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 \\ \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix}.$$

Korak 3. Računamo

$$\delta = \sigma_\varepsilon^2 / \sigma_\alpha^2.$$

REML ocene korišćenjem EM algoritma

Korak 1. Odredi se matrica srodstva A.

Korak 2. Zadaju se početne vrednosti varijansi σ_ε^2 i σ_α^2, postavi se brojač $k = 0$ i definiše

$$\theta_0 = \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 \\ \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix}.$$

Korak 3. Računamo

$$\delta = \sigma_\varepsilon^2 / \sigma_\alpha^2.$$

Korak 4. Odrede se matrice

$$R = \sigma_\varepsilon^2 I, \quad G = \sigma_\alpha^2 A.$$

REML ocene korišćenjem EM algoritma

Korak 1. Odredi se matrica srodstva A.

Korak 2. Zadaju se početne vrednosti varijansi σ_ε^2 i σ_α^2, postavi se brojač $k = 0$ i definiše

$$\theta_0 = \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 \\ \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix}.$$

Korak 3. Računamo

$$\delta = \sigma_\varepsilon^2 / \sigma_\alpha^2.$$

Korak 4. Odrede se matrice

$$R = \sigma_\varepsilon^2 I, \quad G = \sigma_\alpha^2 A.$$

Korak 5. Sada je

$$V = ZGZ' + R, \quad P = V^{-1} - V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}.$$

REML ocene korišćenjem EM algoritma

REML ocene korišćenjem EM algoritma

Korak 6. Ako sa $|\cdot|$ označimo determinantu neke matrice, računamo

$$y'Py, \ \ \log|V|, \ \ \log|X'V^{-1}X|.$$

REML ocene korišćenjem EM algoritma

Korak 6. Ako sa $|\cdot|$ označimo determinantu neke matrice, računamo

$$y'Py, \;\; \log|V|, \;\; \log|X'V^{-1}X|.$$

Korak 7. Računamo vrednost funkcije L koju želimo da maksimiziramo ocenjujući σ_ε^2 i σ_α^2.

$$L = \frac{1}{2}\left(-y'Py - \log|V| - \log|X'V^{-1}X|\right).$$

REML ocene korišćenjem EM algoritma

Korak 6. Ako sa $|\cdot|$ označimo determinantu neke matrice, računamo

$$y'Py, \;\; \log|V|, \;\; \log|X'V^{-1}X|.$$

Korak 7. Računamo vrednost funkcije L koju želimo da maksimiziramo ocenjujući σ_ε^2 i σ_α^2.

$$L = \frac{1}{2}\left(-y'Py - \log|V| - \log|X'V^{-1}X|\right).$$

Korak 8. Rešavamo sistem

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + \delta A^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix}$$

REML ocene korišćenjem EM algoritma

REML ocene korišćenjem EM algoritma

Korak 9. Sa C^{22} označavamo deo inverzne matrice sistema iz koraka 8 koji odgovara slučajnim efektima. Ako je n broj elemenata vektora y, p rang matrice X i q broj elemenata vektora $\hat{\alpha}$, računamo

$$\sigma_{\alpha}^{2} = \left(\hat{\alpha}' A^{-1}\hat{\alpha} + \mathrm{trag}(C^{22}A^{-1})\sigma_{\varepsilon}^{2}\right)/q$$

i

$$\sigma_{\varepsilon}^{2} = (y - X\hat{\beta} - Z\hat{\alpha})' y / (n - p)$$

REML ocene korišćenjem EM algoritma

Korak 9. Sa C^{22} označavamo deo inverzne matrice sistema iz koraka 8 koji odgovara slučajnim efektima. Ako je n broj elemenata vektora y, p rang matrice X i q broj elemenata vektora $\hat{\alpha}$, računamo

$$\sigma_\alpha^2 = \left(\hat{\alpha}' A^{-1}\hat{\alpha} + \mathrm{trag}(C^{22}A^{-1})\sigma_\varepsilon^2\right)/q$$

i

$$\sigma_\varepsilon^2 = (y - X\hat{\beta} - Z\hat{\alpha})' y/(n-p)$$

Korak 10. Ako je razlika između prethodno i novoizračunatih varijansi dovoljno mala, računamo vrednost za L. U suprotnom, vraćamo se na korak 3.

REML ocene korišćenjem AI algoritma

REML ocene korišćenjem AI algoritma

- Zahteva parcijalne izvode prvog reda funkcije verodostojnosti.

REML ocene korišćenjem AI algoritma

- Zahteva parcijalne izvode prvog reda funkcije verodostojnosti.
- Zahteva prosek parcijalnih izvoda drugog reda funkcije verodostojnosti i očekivanih vrednosti tih parcijalnih izvoda.

REML ocene korišćenjem AI algoritma

- Zahteva parcijalne izvode prvog reda funkcije verodostojnosti.
- Zahteva prosek parcijalnih izvoda drugog reda funkcije verodostojnosti i očekivanih vrednosti tih parcijalnih izvoda.
- Uključuje veze između slučajnih faktora.

REML ocene korišćenjem AI algoritma

- Zahteva parcijalne izvode prvog reda funkcije verodostojnosti.
- Zahteva prosek parcijalnih izvoda drugog reda funkcije verodostojnosti i očekivanih vrednosti tih parcijalnih izvoda.
- Uključuje veze između slučajnih faktora.
- U svakoj iteraciji su neophodna rešenja MME i trag dela inverzne matrice koja odgovara slučajnim faktorima.

REML ocene korišćenjem AI algoritma

- Zahteva parcijalne izvode prvog reda funkcije verodostojnosti.
- Zahteva prosek parcijalnih izvoda drugog reda funkcije verodostojnosti i očekivanih vrednosti tih parcijalnih izvoda.
- Uključuje veze između slučajnih faktora.
- U svakoj iteraciji su neophodna rešenja MME i trag dela inverzne matrice koja odgovara slučajnim faktorima.
- Algoritam se zaustavlja kada je razlika između izračunatih ocena komponenata varijasi manja od unapred zadatog broja.

REML ocene korišćenjem AI algoritma

- Zahteva parcijalne izvode prvog reda funkcije verodostojnosti.
- Zahteva prosek parcijalnih izvoda drugog reda funkcije verodostojnosti i očekivanih vrednosti tih parcijalnih izvoda.
- Uključuje veze između slučajnih faktora.
- U svakoj iteraciji su neophodna rešenja MME i trag dela inverzne matrice koja odgovara slučajnim faktorima.
- Algoritam se zaustavlja kada je razlika između izračunatih ocena komponenata varijasi manja od unapred zadatog broja.
- Brža konvergencija algoritma u odnosu na prethodni algoritam.

REML ocene korišćenjem AI algoritma

REML ocene korišćenjem AI algoritma

Korak 1. Odredi se matrica srodstva A.

REML ocene korišćenjem AI algoritma

Korak 1. Odredi se matrica srodstva A.

Korak 2. Zadaju se početne vrednosti varijansi σ_ε^2 i σ_α^2, postavi se brojač $k = 0$ i definiše

$$\theta_0 = \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 \\ \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix}.$$

REML ocene korišćenjem AI algoritma

Korak 1. Odredi se matrica srodstva A.

Korak 2. Zadaju se početne vrednosti varijansi σ_ε^2 i σ_α^2, postavi se brojač $k = 0$ i definiše

$$\theta_0 = \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 \\ \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix}.$$

Korak 3. Računamo

$$\delta = \sigma_\varepsilon^2 / \sigma_\alpha^2.$$

REML ocene korišćenjem AI algoritma

Korak 1. Odredi se matrica srodstva A.

Korak 2. Zadaju se početne vrednosti varijansi σ_ε^2 i σ_α^2, postavi se brojač $k = 0$ i definiše

$$\theta_0 = \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 \\ \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix}.$$

Korak 3. Računamo

$$\delta = \sigma_\varepsilon^2 / \sigma_\alpha^2.$$

Korak 4. Odrede se matrice

$$R = \sigma_\varepsilon^2 I, \quad G = \sigma_\alpha^2 A.$$

REML ocene korišćenjem AI algoritma

Korak 1. Odredi se matrica srodstva A.

Korak 2. Zadaju se početne vrednosti varijansi σ_ε^2 i σ_α^2, postavi se brojač $k = 0$ i definiše

$$\theta_0 = \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 \\ \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix}.$$

Korak 3. Računamo

$$\delta = \sigma_\varepsilon^2 / \sigma_\alpha^2.$$

Korak 4. Odrede se matrice

$$R = \sigma_\varepsilon^2 I, \quad G = \sigma_\alpha^2 A.$$

Korak 5. Sada je

$$V = ZGZ' + R, \quad P = V^{-1} - V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}.$$

REML ocene korišćenjem AI algoritma

REML ocene korišćenjem AI algoritma

Korak 6. Ako sa $|\cdot|$ označimo determinantu neke matrice, računamo

$$y'Py, \quad \log|V|, \quad \log|X'V^{-1}X|.$$

REML ocene korišćenjem AI algoritma

Korak 6. Ako sa $|\cdot|$ označimo determinantu neke matrice, računamo

$$y'Py, \;\; \log|V|, \;\; \log|X'V^{-1}X|.$$

Korak 7. Računamo vrednost funkcije L koju želimo da maksimiziramo ocenjujući σ_ε^2 i σ_α^2.

$$L = \frac{1}{2}\left(-y'Py - \log|V| - \log|X'V^{-1}X|\right).$$

REML ocene korišćenjem AI algoritma

Korak 6. Ako sa $|\cdot|$ označimo determinantu neke matrice, računamo

$$y'Py, \;\; \log|V|, \;\; \log|X'V^{-1}X|.$$

Korak 7. Računamo vrednost funkcije L koju želimo da maksimiziramo ocenjujući σ_ε^2 i σ_α^2.

$$L = \frac{1}{2}\left(-y'Py - \log|V| - \log|X'V^{-1}X|\right).$$

Korak 8. Rešavamo sistem

$$\left[\begin{array}{cc} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + \delta A^{-1} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \hat{\beta} \\ \hat{\alpha} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} X'y \\ Z'y \end{array}\right]$$

REML ocene korišćenjem AI algoritma

Korak 9. Sa C^{22} označavamo deo inverzne matrice sistema iz koraka 8 koji odgovara slučajnim efektima. Neka je $s = y - X\hat{\beta} - Z\hat{\alpha}$, gde su $\hat{\beta}$ i $\hat{\alpha}$ rešenja sistema iz koraka 8. Ako je n broj elemenata vektora y, p rang matrice X i q broj elemenata vektora $\hat{\alpha}$, računamo

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma_\varepsilon^2} = \frac{1}{2}\left(s's/(\sigma_\varepsilon^2)^2 - (n-p-q)/\sigma_\varepsilon^2 - \text{trag}(C^{22}A^{-1})/\sigma_\alpha^2\right)$$

i

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma_\alpha^2} = \frac{1}{2}\left(\hat{\alpha}'A^{-1}\hat{\alpha}/(\sigma_\alpha^2)^2 - q/\sigma_\alpha^2 + \text{trag}(C^{22}A^{-1})\sigma_\varepsilon^2/(\sigma_\alpha^2)^2\right).$$

REML ocene korišćenjem AI algoritma

REML ocene korišćenjem AI algoritma

Korak 10. Računamo sada prosečne parcijalne izvode drugog reda.

$$M = Av\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\sigma_\varepsilon^2 \partial\sigma_\varepsilon^2}\right) = -\frac{1}{2}\left(s' P s/(\sigma_\varepsilon^2)^2\right),$$

$$N = Av\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\sigma_\alpha^2 \partial\sigma_\alpha^2}\right) = -\frac{1}{2}\left(\hat{\alpha}' Z' P Z \hat{\alpha}/(\sigma_\alpha^2)^2\right)$$

i

$$Q = Av\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\sigma_\varepsilon^2 \partial\sigma_\alpha^2}\right) = -\frac{1}{2}\left(\hat{\alpha}' Z' P s\right)/(\sigma_\varepsilon^2 \sigma_\alpha^2)$$

Korak 10. Računamo sada prosečne parcijalne izvode drugog reda.

$$M = Av\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\sigma_\varepsilon^2 \partial\sigma_\varepsilon^2}\right) = -\frac{1}{2}\left(s' P s/(\sigma_\varepsilon^2)^2\right),$$

$$N = Av\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\sigma_\alpha^2 \partial\sigma_\alpha^2}\right) = -\frac{1}{2}\left(\hat{\alpha}' Z' P Z \hat{\alpha}/(\sigma_\alpha^2)^2\right)$$

i

$$Q = Av\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\sigma_\varepsilon^2 \partial\sigma_\alpha^2}\right) = -\frac{1}{2}\left(\hat{\alpha}' Z' P s\right)/(\sigma_\varepsilon^2 \sigma_\alpha^2)$$

Korak 11. Formiramo matricu A_{inf} na sledeći način

$$A_{inf} = \begin{bmatrix} -M & -Q \\ -Q & -N \end{bmatrix}$$

i odredimo A_{inf}^{-1}.

REML ocene korišćenjem AI algoritma

REML ocene korišćenjem AI algoritma

Korak 12. Sada računamo nove ocene varijansi

$$\theta_{k+1} = \theta_k + A_{inf}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \partial L/\sigma_\varepsilon^2 \\ \partial L/\sigma_\alpha^2 \end{bmatrix}$$

i dobijamo nove ocena varijansi

$$\begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 \\ \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix} = \theta_{k+1}$$

REML ocene korišćenjem AI algoritma

Korak 12. Sada računamo nove ocene varijansi

$$\theta_{k+1} = \theta_k + A_{inf}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \partial L/\sigma_\varepsilon^2 \\ \partial L/\sigma_\alpha^2 \end{bmatrix}$$

i dobijamo nove ocena varijansi

$$\begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 \\ \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix} = \theta_{k+1}$$

Korak 13. Ako je razlika između prethodno i novoizračunatih varijansi dovoljno mala, računamo njihove standardne greške

$$SE_{\sigma_\varepsilon^2} = \sqrt{A_{inf}^{-1}(1,1)}$$

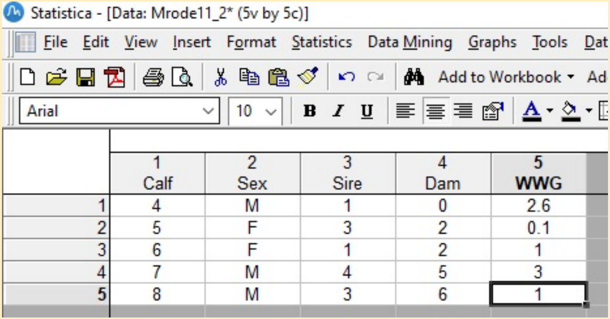
i

$$SE_{\sigma_\alpha^2} = \sqrt{A_{inf}^{-1}(2,2)}.$$

U suprotnom, vraćamo se na korak 3.

Početne vrednosti za varijanse, Primer 3.

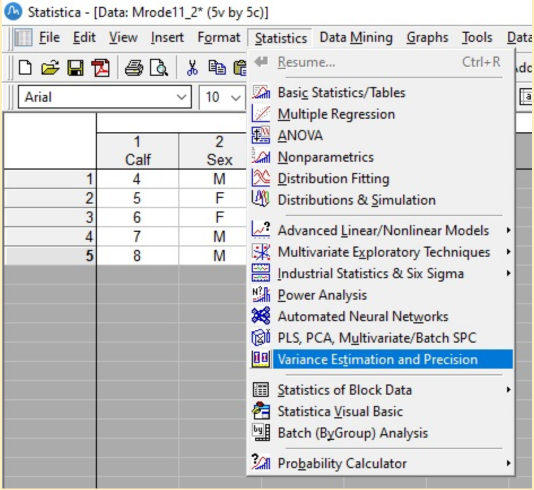
Početne vrednosti za varijanse, Primer 3.



	1 Calf	2 Sex	3 Sire	4 Dam	5 WWG
1	4	M	1	0	2.6
2	5	F	3	2	0.1
3	6	F	1	2	1
4	7	M	4	5	3
5	8	M	3	6	1

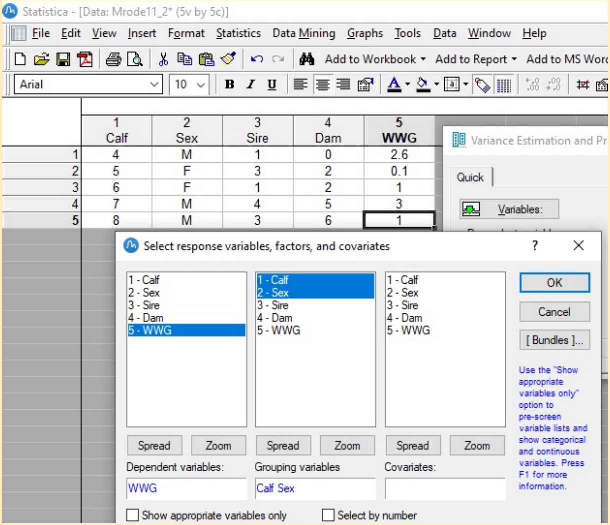
Početne vrednosti za varijanse, Primer 3.

Početne vrednosti za varijanse, Primer 3.



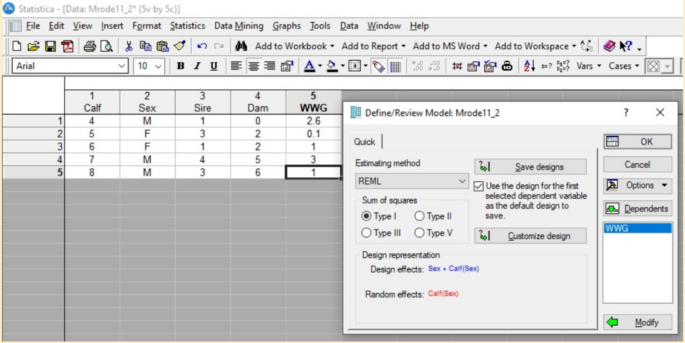
Početne vrednosti za varijanse, Primer 3.

Početne vrednosti za varijanse, Primer 3.



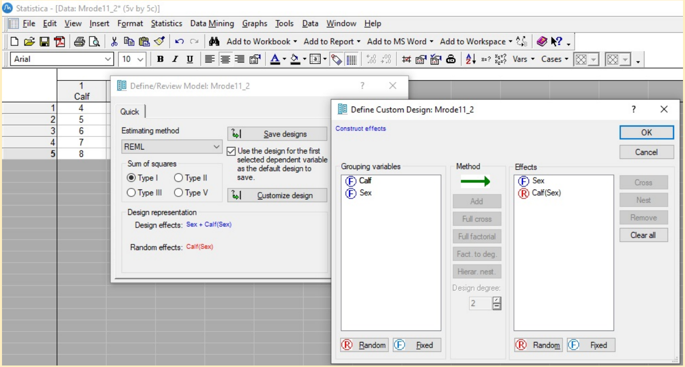
Početne vrednosti za varijanse, Primer 3.

Početne vrednosti za varijanse, Primer 3.



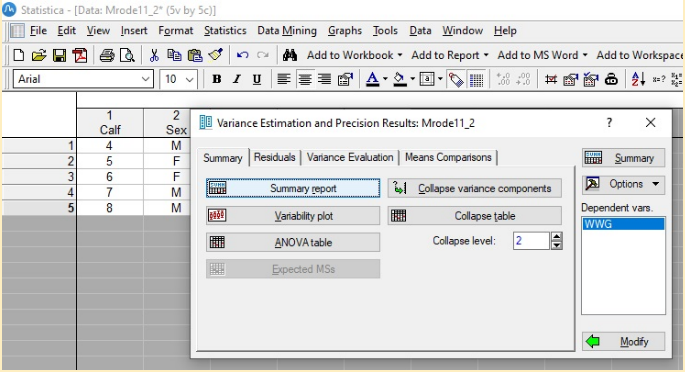
Početne vrednosti za varijanse, Primer 3.

Početne vrednosti za varijanse, Primer 3.



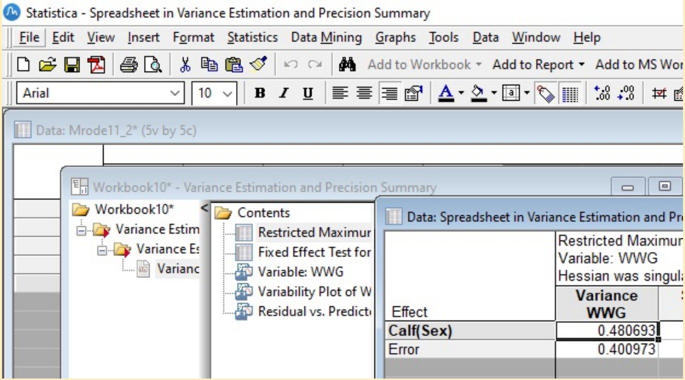
Početne vrednosti za varijanse, Primer 3.

Početne vrednosti za varijanse, Primer 3.



Početne vrednosti za varijanse, Primer 3.

Početne vrednosti za varijanse, Primer 3.



Početne vrednosti za varijanse, Primer 3.

Početne vrednosti za varijanse, Primer 3.

Iteracija	σ^2_ε (kg^2)	σ^2_α (kg^2)	L
1	0.40097	0.48069	-2.20343
2	0.46953	0.54267	-2.18215
3	0.48312	0.55126	-2.18173
4	0.48351	0.55136	-2.18173
5	0.48351	0.55136	-2.18173

Početne vrednosti za varijanse, Primer 3.

Iteracija	σ_ε^2 (kg^2)	σ_α^2 (kg^2)	L
1	0.40097	0.48069	−2.20343
2	0.46953	0.54267	−2.18215
3	0.48312	0.55126	−2.18173
4	0.48351	0.55136	−2.18173
5	0.48351	0.55136	−2.18173

Logaritam funkcije verodostojnosti je

$$L = -\frac{1}{2}\left(y'Py - \ln|V| - \ln|X'V^{-1}X|\right)$$

i od L se traži maksimum po komponentama varijansi σ_ε^2 i σ_α^2.

Početne vrednosti za varijanse, Primer 3.

Iteracija	σ_ε^2 (kg^2)	σ_α^2 (kg^2)	L
1	0.40097	0.48069	−2.20343
2	0.46953	0.54267	−2.18215
3	0.48312	0.55126	−2.18173
4	0.48351	0.55136	−2.18173
5	0.48351	0.55136	−2.18173

Logaritam funkcije verodostojnosti je

$$L = -\frac{1}{2}\left(y'Py - \ln|V| - \ln|X'V^{-1}X|\right)$$

i od L se traži maksimum po komponentama varijansi σ_ε^2 i σ_α^2.
Standardne greške su $SE_{\sigma_\varepsilon^2} = 1.56317$ i $SE_{\sigma_\alpha^2} = 2.31253$.

Početne vrednosti za varijanse, Primer 3.

Početne vrednosti za varijanse, Primer 3.

Efekti	Iter. 1	Iter. 2	Iter. 3	Iter. 4	Iter. 5
Pol					
m	2.10059	2.10265	2.10337	2.10340	2.10340
f	0.62156	0.62105	0.62085	0.62084	0.62084
Životinja					
1	0.20272	0.19879	0.19741	0.19734	0.19734
2	−0.02694	−0.02725	−0.02734	−0.02735	−0.02735
3	−0.38122	−0.37398	−0.37145	−0.37132	−0.37132
4	0.40952	0.40305	0.40078	0.40066	0.40066
5	−0.22831	−0.22420	−0.22277	−0.22270	−0.22270
6	0.08518	0.08211	0.08106	0.08101	0.08101
7	0.39372	0.38532	0.38239	0.38225	0.38225
8	−0.50502	−0.49632	−0.49327	−0.49312	−0.49312