Postavljanje matematičko-statističkog modela

2022

Određivanje fiksnih i slučajnih efekata

Određivanje fiksnih i slučajnih efekata

Prvo da napravimo razliku između faktora i nivoa. Posmatrajmo sledeću tabelu.

Određivanje fiksnih i slučajnih efekata

Prvo da napravimo razliku između faktora i nivoa. Posmatrajmo sledeću tabelu.

	Bračni status					
	U braku			Nije u braku		
	Lek			Lek		
Pol	A	B	C	A	B	C
Muški						
Ženski						

Određivanje fiksnih i slučajnih efekata

Prvo da napravimo razliku između faktora i nivoa. Posmatrajmo sledeću tabelu.

	Bračni status					
	U braku			Nije u braku		
	Lek			Lek		
Pol	A	B	C	A	B	C
Muški						
Ženski						

Faktori su pol, lek i bračni status. Faktor lek ima tri nivoa, faktor pol ima dva nivoa i faktor bračni status ima dva nivoa.

Određivanje fiksnih i slučajnih efekata

Prvo da napravimo razliku između faktora i nivoa. Posmatrajmo sledeću tabelu.

	Bračni status					
	U braku			Nije u braku		
	Lek			Lek		
Pol	A	B	C	A	B	C
Muški						
Ženski						

Faktori su pol, lek i bračni status. Faktor lek ima tri nivoa, faktor pol ima dva nivoa i faktor bračni status ima dva nivoa.

Zanima nas kako različiti nivoi faktora utiču na neku promenljivu koja nas interesuje. Taj uticaj nazivamo efekat. Efekte delimo na fiksne i slučajne.

Određivanje fiksnih i slučajnih efekata

Prvo da napravimo razliku između faktora i nivoa. Posmatrajmo sledeću tabelu.

	Bračni status					
	U braku			Nije u braku		
	Lek			Lek		
Pol	A	B	C	A	B	C
Muški						
Ženski						

Faktori su pol, lek i bračni status. Faktor lek ima tri nivoa, faktor pol ima dva nivoa i faktor bračni status ima dva nivoa.

Zanima nas kako različiti nivoi faktora utiču na neku promenljivu koja nas interesuje. Taj uticaj nazivamo efekat. Efekte delimo na fiksne i slučajne.

Fiksni efekti se pripisuju faktorima koji imaju konačan skup nivoa i zbog toga što smo zainteresovani da ispitamo nivoe tih faktora. U gornjoj tabeli, sva tri faktora se posmatraju kao fiksni efekti.

Određivanje fiksnih i slučajnih efekata

Određivanje fiksnih i slučajnih efekata

Druga vrsta efekata su slučajni efekti. Obično se pripisuju faktorima koji imaju beskonačan skup nivoa od kojih proizvoljan uzorak se pojavi u našim podacima. Na primer, uzimaju se četiri vekne hleba od svake od šest serija hleba pečenih na tri različite temperature. Faktor serija hleba bi se smatrao slučajnim efektom jer su izabrane serije hleba iz beskonačnog skupa serija pečenja hleba. Temperatura bi bila posatrana kao fiskni efekat jer smo zainteresovani samo za određene temperature.

Određivanje fiksnih i slučajnih efekata

Druga vrsta efekata su slučajni efekti. Obično se pripisuju faktorima koji imaju beskonačan skup nivoa od kojih proizvoljan uzorak se pojavi u našim podacima. Na primer, uzimaju se četiri vekne hleba od svake od šest serija hleba pečenih na tri različite temperature. Faktor serija hleba bi se smatrao slučajnim efektom jer su izabrane serije hleba iz beskonačnog skupa serija pečenja hleba. Temperatura bi bila posatrana kao fiskni efekat jer smo zainteresovani samo za određene temperature.

Modeli koji sadrže samo fiksne efekte nazivaju se modeli sa fiksnim efektima. Modeli koji sadrže samo slučajne efekte nazivaju se modeli sa slučajnim efektima. Modeli koji sadrže obe vrste efekata nazivaju se mešoviti modeli.

Određivanje fiksnih i slučajnih efekata

Druga vrsta efekata su slučajni efekti. Obično se pripisuju faktorima koji imaju beskonačan skup nivoa od kojih proizvoljan uzorak se pojavi u našim podacima. Na primer, uzimaju se četiri vekne hleba od svake od šest serija hleba pečenih na tri različite temperature. Faktor serija hleba bi se smatrao slučajnim efektom jer su izabrane serije hleba iz beskonačnog skupa serija pečenja hleba. Temperatura bi bila posatrana kao fiskni efekat jer smo zainteresovani samo za određene temperature.

Modeli koji sadrže samo fiksne efekte nazivaju se modeli sa fiksnim efektima. Modeli koji sadrže samo slučajne efekte nazivaju se modeli sa slučajnim efektima. Modeli koji sadrže obe vrste efekata nazivaju se mešoviti modeli.

Sada ćemo ilustrovati prirodu oba efekta na ilustrativnim primerima naglašavajući njihove osobine.

Model sa fiksnim efektima

Model sa fiksnim efektima

Baštovan je poneo 24 biljke paradajza, odnosno ima od svake od 4 različite vrste po šest biljaka. Želi da napravi mali eksperiment. Baštovan je zainteresovan za ove 4 vrste paradajza jer ih je probao prošlog leta. Podeliće pravougaonu parcelu na 24 kvadrata i za svaku biljku slučajno će odabrati jedan kvadrat da bi zasadio biljku.

Model sa fiksnim efektima

Baštovan je poneo 24 biljke paradajza, odnosno ima od svake od 4 različite vrste po šest biljaka. Želi da napravi mali eksperiment. Baštovan je zainteresovan za ove 4 vrste paradajza jer ih je probao prošlog leta. Podeliće pravougaonu parcelu na 24 kvadrata i za svaku biljku slučajno će odabrati jedan kvadrat da bi zasadio biljku. Ako je y_{ij} prinos paradajza od biljke j koja pripada vrsti i, tada je $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ i $i = 1, 2, 3, 4$. Pošto očekujemo da prinos zavisi od vrste paradajza, model bi glasio

Model sa fiksnim efektima

Baštovan je poneo 24 biljke paradajza, odnosno ima od svake od 4 različite vrste po šest biljaka. Želi da napravi mali eksperiment. Baštovan je zainteresovan za ove 4 vrste paradajza jer ih je probao prošlog leta. Podeliće pravougaonu parcelu na 24 kvadrata i za svaku biljku slučajno će odabrati jedan kvadrat da bi zasadio biljku. Ako je y_{ij} prinos paradajza od biljke j koja pripada vrsti i, tada je $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ i $i = 1, 2, 3, 4$. Pošto očekujemo da prinos zavisi od vrste paradajza, model bi glasio

$$E(y_{ij}) = \mu_i$$

Model sa fiksnim efektima

Baštovan je poneo 24 biljke paradajza, odnosno ima od svake od 4 različite vrste po šest biljaka. Želi da napravi mali eksperiment. Baštovan je zainteresovan za ove 4 vrste paradajza jer ih je probao prošlog leta. Podeliće pravougaonu parcelu na 24 kvadrata i za svaku biljku slučajno će odabrati jedan kvadrat da bi zasadio biljku. Ako je y_{ij} prinos paradajza od biljke j koja pripada vrsti i, tada je $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ i $i = 1, 2, 3, 4$. Pošto očekujemo da prinos zavisi od vrste paradajza, model bi glasio

$$E(y_{ij}) = \mu_i$$

gde je E matematičko očekivanje i μ_i je očekivan prinos biljke i-te vrste. Sa druge strane, μ_i se može napisati i preko opšte srednje vrednosti prinosa koju ćemo obeležiti sa μ i efekta β_i koji donosi vrsta i. Sada je

Model sa fiksnim efektima

Baštovan je poneo 24 biljke paradajza, odnosno ima od svake od 4 različite vrste po šest biljaka. Želi da napravi mali eksperiment. Baštovan je zainteresovan za ove 4 vrste paradajza jer ih je probao prošlog leta. Podeliće pravougaonu parcelu na 24 kvadrata i za svaku biljku slučajno će odabrati jedan kvadrat da bi zasadio biljku. Ako je y_{ij} prinos paradajza od biljke j koja pripada vrsti i, tada je $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ i $i = 1, 2, 3, 4$. Pošto očekujemo da prinos zavisi od vrste paradajza, model bi glasio

$$E(y_{ij}) = \mu_i$$

gde je E matematičko očekivanje i μ_i je očekivan prinos biljke i-te vrste. Sa druge strane, μ_i se može napisati i preko opšte srednje vrednosti prinosa koju ćemo obeležiti sa μ i efekta β_i koji donosi vrsta i. Sada je

$$E(y_{ij}) = \mu + \beta_i.$$

Model sa fiksnim efektima

Model sa fiksnim efektima

U ovom modelu, svako μ_i, tj. svaka očekivana vrednost za y_{ij} je posmatrana kao fiksna konstanta čiju veličinu želimo da ocenimo. Baštovan je zainteresovani smo za samo te 4 vrste, druge ga ne zanimaju. Zbog toga je β_i zapravo fiksni efekat.

Model sa fiksnim efektima

U ovom modelu, svako μ_i, tj. svaka očekivana vrednost za y_{ij} je posmatrana kao fiksna konstanta čiju veličinu želimo da ocenimo. Baštovan je zainteresovani smo za samo te 4 vrste, druge ga ne zanimaju. Zbog toga je β_i zapravo fiksni efekat.

Ako sa ε_{ij} označimo razliku prinosa y_{ij} od svoje očekivane vrednosti $E(y_{ij})$, dobijamo ostatak (grešku) ε_{ij}, odnosno

$$\varepsilon_{ij} = y_{ij} - E(y_{ij}),$$

Model sa fiksnim efektima

U ovom modelu, svako μ_i, tj. svaka očekivana vrednost za y_{ij} je posmatrana kao fiksna konstanta čiju veličinu želimo da ocenimo. Baštovan je zainteresovani smo za samo te 4 vrste, druge ga ne zanimaju. Zbog toga je β_i zapravo fiksni efekat.

Ako sa ε_{ij} označimo razliku prinosa y_{ij} od svoje očekivane vrednosti $E(y_{ij})$, dobijamo ostatak (grešku) ε_{ij}, odnosno

$$\varepsilon_{ij} = y_{ij} - E(y_{ij}),$$

odakle sledi

$$\varepsilon_{ij} = y_{ij} - (\mu + \beta_i) \Rightarrow \boxed{y_{ij} = \mu + \beta_i + \varepsilon_{ij}} = \mu_i + \varepsilon_{ij}.$$

Model sa fiksnim efektima

Model sa fiksnim efektima

Po definiciji, ε_{ij} je slučajna promenljiva, a kako matematičko očekivanje ima osobinu linearnosti u zbiru, tada dobijamo

$$E(\varepsilon_{ij}) = E\left(y_{ij} - E(y_{ij})\right) = E(y_{ij}) - E(E(y_{ij})) = E(y_{ij}) - E(y_{ij}) = 0.$$

Model sa fiksnim efektima

Po definiciji, ε_{ij} je slučajna promenljiva, a kako matematičko očekivanje ima osobinu linearnosti u zbiru, tada dobijamo

$$E(\varepsilon_{ij}) = E\left(y_{ij} - E(y_{ij})\right) = E(y_{ij}) - E(E(y_{ij})) = E(y_{ij}) - E(y_{ij}) = 0.$$

Pošto se radi o slučajnoj promenljivoj, možemo joj dodeliti varijansno-kovarijansnu strukturu:

- svaki ε_{ij} ima istu varijansu σ_{ε}^2,

Model sa fiksnim efektima

Po definiciji, ε_{ij} je slučajna promenljiva, a kako matematičko očekivanje ima osobinu linearnosti u zbiru, tada dobijamo

$$E(\varepsilon_{ij}) = E\left(y_{ij} - E(y_{ij})\right) = E(y_{ij}) - E(E(y_{ij})) = E(y_{ij}) - E(y_{ij}) = 0.$$

Pošto se radi o slučajnoj promenljivoj, možemo joj dodeliti varijansno-kovarijansnu strukturu:

- svaki ε_{ij} ima istu varijansu σ_{ε}^2,
- nezavisni su i sa istom raspodelom verovatnoće,

Model sa fiksnim efektima

Po definiciji, ε_{ij} je slučajna promenljiva, a kako matematičko očekivanje ima osobinu linearnosti u zbiru, tada dobijamo

$$E(\varepsilon_{ij}) = E\left(y_{ij} - E(y_{ij})\right) = E(y_{ij}) - E(E(y_{ij})) = E(y_{ij}) - E(y_{ij}) = 0.$$

Pošto se radi o slučajnoj promenljivoj, možemo joj dodeliti varijansno-kovarijansnu strukturu:

- svaki ε_{ij} ima istu varijansu σ^2_ε,
- nezavisni su i sa istom raspodelom verovatnoće,
- parovi različitih ε_{ij} imaju kovarijansu 0.

Model sa fiksnim efektima

Model sa fiksnim efektima

Za svako i, j važi

$$Var(\varepsilon_{ij}) = \sigma_\varepsilon^2$$

Model sa fiksnim efektima

Za svako i, j važi

$$Var(\varepsilon_{ij}) = \sigma_\varepsilon^2$$

i

$$Cov(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{i'j'}) = 0, \text{ za } i \neq i', j \neq j'.$$

Model sa fiksnim efektima

Za svako i, j važi

$$Var(\varepsilon_{ij}) = \sigma_\varepsilon^2$$

i

$$Cov(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{i'j'}) = 0, \quad \text{za} \quad i \neq i', j \neq j'.$$

Dalje važi

$$\sigma_\varepsilon^2 = Var(\varepsilon_{ij}) = E((\varepsilon_{ij} - E(\varepsilon_{ij}))^2) = E((\varepsilon_{ij} - 0)^2) = E(\varepsilon_{ij}^2).$$

Model sa slučajnim efektima

Model sa slučajnim efektima

Uobičajena praksa kod farmera koji se bave proizvodnjom mleka da njihove krave oplode semenom bikova koji se nalaze u korporacijama za veštački uzgoj. Svake godine korporacije kupe do 150 mladih bikova koji predstavljaju slučajan uzorak uzet iz populacije bikova za tu svrhu (da budu čevi ženskih teladi koje se uzgajaju radi proizvodnje mleka). Količina semena je dovoljna da se tri godine kasnije, od semena jednog bika, oko 60 ćerki krava nalazi u evidenciji za proizvodnju mleka.

Model sa slučajnim efektima

Uobičajena praksa kod farmera koji se bave proizvodnjom mleka da njihove krave oplode semenom bikova koji se nalaze u korporacijama za veštački uzgoj. Svake godine korporacije kupe do 150 mladih bikova koji predstavljaju slučajan uzorak uzet iz populacije bikova za tu svrhu (da budu čevi ženskih teladi koje se uzgajaju radi proizvodnje mleka). Količina semena je dovoljna da se tri godine kasnije, od semena jednog bika, oko 60 ćerki krava nalazi u evidenciji za proizvodnju mleka.

Ako je y_{ij} količina mleka j-te ćerke krave od i-tog bika, a α_i efekat i-tog bika tada je $i = 1, 2, \ldots, 150$ i $j = 1, 2, \ldots, 60$, a model je

Model sa slučajnim efektima

Uobičajena praksa kod farmera koji se bave proizvodnjom mleka da njihove krave oplode semenom bikova koji se nalaze u korporacijama za veštački uzgoj. Svake godine korporacije kupe do 150 mladih bikova koji predstavljaju slučajan uzorak uzet iz populacije bikova za tu svrhu (da budu čevi ženskih teladi koje se uzgajaju radi proizvodnje mleka). Količina semena je dovoljna da se tri godine kasnije, od semena jednog bika, oko 60 ćerki krava nalazi u evidenciji za proizvodnju mleka.

Ako je y_{ij} količina mleka j-te ćerke krave od i-tog bika, a α_i efekat i-tog bika tada je $i = 1, 2, \ldots, 150$ i $j = 1, 2, \ldots, 60$, a model je

$$E(y_{ij}) = \mu + \alpha_i, \tag{1}$$

Model sa slučajnim efektima

Uobičajena praksa kod farmera koji se bave proizvodnjom mleka da njihove krave oplode semenom bikova koji se nalaze u korporacijama za veštački uzgoj. Svake godine korporacije kupe do 150 mladih bikova koji predstavljaju slučajan uzorak uzet iz populacije bikova za tu svrhu (da budu čevi ženskih teladi koje se uzgajaju radi proizvodnje mleka). Količina semena je dovoljna da se tri godine kasnije, od semena jednog bika, oko 60 ćerki krava nalazi u evidenciji za proizvodnju mleka.

Ako je y_{ij} količina mleka j-te ćerke krave od i-tog bika, a α_i efekat i-tog bika tada je $i = 1, 2, \ldots, 150$ i $j = 1, 2, \ldots, 60$, a model je

$$E(y_{ij}) = \mu + \alpha_i, \tag{1}$$

gde je μ prosečna količina mleka. Kako su bikovi iz slučajnog uzorka iz populacije bikova, α_i se posmatra kao slučajni efekat, tj. α_i je slučajna promenljiva.

Model sa slučajnim efektima

Model sa slučajnim efektima

Potrebno je odrediti varijansno-kovarijansnu strukturu. Kao i kod ε_{ij}, obično se koristi da:

Model sa slučajnim efektima

Potrebno je odrediti varijansno-kovarijansnu strukturu. Kao i kod ε_{ij}, obično se koristi da:

- svaki α_i ima istu varijansu σ_α^2,

Model sa slučajnim efektima

Potrebno je odrediti varijansno-kovarijansnu strukturu. Kao i kod ε_{ij}, obično se koristi da:

- svaki α_i ima istu varijansu σ_α^2,
- imaju srednju vrednost 0 ($E(\alpha_i) = 0$),

Model sa slučajnim efektima

Potrebno je odrediti varijansno-kovarijansnu strukturu. Kao i kod ε_{ij}, obično se koristi da:

- svaki α_i ima istu varijansu σ^2_α,
- imaju srednju vrednost 0 ($E(\alpha_i) = 0$),
- su nezavisni i sa istom raspodelom verovatnoće,

Model sa slučajnim efektima

Potrebno je odrediti varijansno-kovarijansnu strukturu. Kao i kod ε_{ij}, obično se koristi da:

- svaki α_i ima istu varijansu σ^2_α,
- imaju srednju vrednost 0 ($E(\alpha_i) = 0$),
- su nezavisni i sa istom raspodelom verovatnoće,
- parovi različitih α_i imaju kovarijansu 0.

Model sa slučajnim efektima

Potrebno je odrediti varijansno-kovarijansnu strukturu. Kao i kod ε_{ij}, obično se koristi da:

- svaki α_i ima istu varijansu σ_α^2,
- imaju srednju vrednost 0 ($E(\alpha_i) = 0$),
- su nezavisni i sa istom raspodelom verovatnoće,
- parovi različitih α_i imaju kovarijansu 0.

Za svako i važi

$$Var(\alpha_i) = \sigma_\alpha^2$$

Model sa slučajnim efektima

Potrebno je odrediti varijansno-kovarijansnu strukturu. Kao i kod ε_{ij}, obično se koristi da:

- svaki α_i ima istu varijansu σ_α^2,
- imaju srednju vrednost 0 ($E(\alpha_i) = 0$),
- su nezavisni i sa istom raspodelom verovatnoće,
- parovi različitih α_i imaju kovarijansu 0.

Za svako i važi

$$Var(\alpha_i) = \sigma_\alpha^2$$

i

$$Cov(\alpha_i, \alpha_{i'}) = 0, \quad \text{za} \quad i \neq i'.$$

Model sa slučajnim efektima

Model sa slučajnim efektima

Dalje važi $\sigma_\alpha^2 = Var(\alpha_i) = E(\alpha_i^2)$.

Model sa slučajnim efektima

Dalje važi $\sigma_\alpha^2 = Var(\alpha_i) = E(\alpha_i^2)$.

Ako se pažljivije posmatra dati model (1), u pitanju je zapravo uslovno očekivanje. Ako se realizovao efekat α_i i-tog oca tada se realizovalo i y_{ij}, tj. model bi zapravo bio

$$E(y_{ij}|\alpha_i) = \mu + \alpha_i. \tag{2}$$

Model sa slučajnim efektima

Dalje važi $\sigma_\alpha^2 = Var(\alpha_i) = E(\alpha_i^2)$.

Ako se pažljivije posmatra dati model (1), u pitanju je zapravo uslovno očekivanje. Ako se realizovao efekat α_i i-tog oca tada se realizovalo i y_{ij}, tj. model bi zapravo bio

$$E(y_{ij}|\alpha_i) = \mu + \alpha_i. \tag{2}$$

Ako se na model (2) primeni matematičko očekivanje, dobijamo da je $E(y_{ij}) = \mu$.

Model sa slučajnim efektima

Dalje važi $\sigma_\alpha^2 = Var(\alpha_i) = E(\alpha_i^2)$.

Ako se pažljivije posmatra dati model (1), u pitanju je zapravo uslovno očekivanje. Ako se realizovao efekat α_i i-tog oca tada se realizovalo i y_{ij}, tj. model bi zapravo bio

$$E(y_{ij}|\alpha_i) = \mu + \alpha_i. \tag{2}$$

Ako se na model (2) primeni matematičko očekivanje, dobijamo da je $E(y_{ij}) = \mu$.

Grešku definišemo kao

$$\varepsilon_{ij} = y_{ij} - E(y_{ij}|\alpha_i) = y_{ij} - (\mu + \alpha_i)$$

pa dobijamo model

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}. \tag{3}$$

Model sa slučajnim efektima

Model sa slučajnim efektima

Model sa slučajnim efektima

Osobine ε_{ij} su:

- $E(\varepsilon_{ij}) = 0$,
- $Var(\varepsilon_{ij}) = \sigma^2_(\varepsilon) = E(\varepsilon^2_{ij})$,
- $Cov(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{i'j'}) = 0, \quad \text{za} \quad i \neq i', j \neq j'$.

Model sa slučajnim efektima

Osobine ε_{ij} su:

- $E(\varepsilon_{ij}) = 0$,
- $Var(\varepsilon_{ij}) = \sigma^2_(\varepsilon) = E(\varepsilon^2_{ij})$,
- $Cov(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{i'j'}) = 0$, za $i \neq i', j \neq j'$.

Na osnovu (3) varijansa od y_{ij} je

$$\sigma^2_y = Var(y_{ij}) = Var(\mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}) = \sigma^2_\alpha + \sigma^2_\varepsilon,$$

Osobine ε_{ij} su:

- $E(\varepsilon_{ij}) = 0$,
- $Var(\varepsilon_{ij}) = \sigma^2_(\varepsilon) = E(\varepsilon^2_{ij})$,
- $Cov(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{i'j'}) = 0, \;$ za $\; i \neq i', j \neq j'$.

Na osnovu (3) varijansa od y_{ij} je

$$\sigma^2_y = Var(y_{ij}) = Var(\mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}) = \sigma^2_\alpha + \sigma^2_\varepsilon,$$

dok je kovarijansa svakog para bik-ćerka krava od istog bika i

$$Cov(y_{ij}, y_{ij'}) = Cov(\mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}, \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}) = \sigma^2_\alpha, \quad \text{za} \quad j \neq j'.$$

Mešoviti model

Mešoviti model

Ubacimo sada u prethodni primer i 4 sezone laktacije. Ako je y_{ijk} količina mleka u i-toj laktaciji, k-te ćerke krave od j-tog bika u sezoni, a β_i efekat i-te laktacije i α_j efekat j-tog bika, tada je $i = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2, \ldots, 150$ i $k = 1, 2, \ldots, 60$, a model je

Mešoviti model

Ubacimo sada u prethodni primer i 4 sezone laktacije. Ako je y_{ijk} količina mleka u i-toj laktaciji, k-te ćerke krave od j-tog bika u sezoni, a β_i efekat i-te laktacije i α_j efekat j-tog bika, tada je $i = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2, \ldots, 150$ i $k = 1, 2, \ldots, 60$, a model je

$$y_{ijk} = \mu + \beta_i + \alpha_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad \text{ili} \quad E(y_{ijk}) = \mu + \beta_i + \alpha_j + \gamma_{ij}$$

Mešoviti model

Ubacimo sada u prethodni primer i 4 sezone laktacije. Ako je y_{ijk} količina mleka u i-toj laktaciji, k-te ćerke krave od j-tog bika u sezoni, a β_i efekat i-te laktacije i α_j efekat j-tog bika, tada je $i = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2, \dots, 150$ i $k = 1, 2, \dots, 60$, a model je

$$y_{ijk} = \mu + \beta_i + \alpha_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad \text{ili} \quad E(y_{ijk}) = \mu + \beta_i + \alpha_j + \gamma_{ij}$$

γ_{ij} je efekat interakcije laktacije i i bika j. Sada je β_i fiksni efekat jer nas zanimaju tačan broj laktacija, a α_j slučajni efekat, kao u prethodnom primeru. γ_{ij} je interakcija između slučajnog i fiksnog faktora pa je i to slučajan faktor.

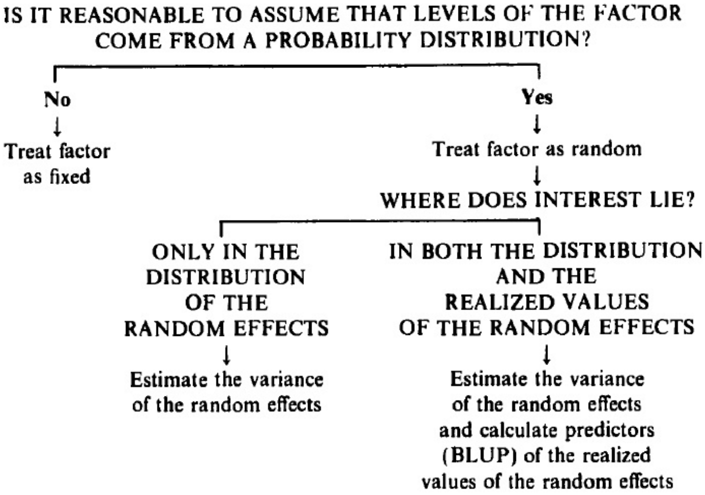
Zaključak o fiksnim i slučajnim efektima

Zaključak o fiksnim i slučajnim efektima

Posmatrajmo drvo odluke.

Zaključak o fiksnim i slučajnim efektima

Posmatrajmo drvo odluke.



Osnovni model

Osnovni model

Generalno se mešoviti modeli mogu predstaviti kao

$$y = X\beta + Z\alpha + \varepsilon \tag{4}$$

gde su:
y - $n \times 1$ vektor posmatranja; n - broj posmatranja
β - $p \times 1$ vektor nepoznatih regresijskih koeficijenata koje još nazivamo i fiksni efekti;
α - $q \times 1$ vektor slučajnih efekata;
ε - $n \times 1$ vektor slučajnih grešaka;
$X_{n \times p}$ i $Z_{n \times q}$ - poznate martice, koje povezuju elemente vektora β i α sa elementima vektora y.

Osnovni model

Osnovni model

Osnovne pretpostavke statističkog modela (4) su da slučajni efekti i greške imaju očekivanje nula i konačnu varijansu. Ako označimo

$$G = Var(\alpha), \quad R = Var(\varepsilon)$$

Osnovni model

Osnovne pretpostavke statističkog modela (4) su da slučajni efekti i greške imaju očekivanje nula i konačnu varijansu. Ako označimo

$$G = Var(\alpha), \quad R = Var(\varepsilon)$$

tada je
$E(\alpha) = E(\varepsilon) = 0;$
$E(y) = X\beta;$
$Var(y) = ZGZ' + R = V;$
$Cov(y, \alpha) = ZG;$
$Cov(y, \varepsilon) = R;$
$Cov(\alpha, \varepsilon) = Cov(\varepsilon, \alpha) = 0.$

Osnovni model

Osnovni model

(Henderson, 1973) Najbolji linearni nepristrasni ocenjivač BLUE (Best Linear unbaised estimator) za fiksne faktore β je

$$\hat{\beta} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y \tag{5}$$

Osnovni model

(Henderson, 1973) Najbolji linearni nepristrasni ocenjivač BLUE (Best Linear unbaised estimator) za fiksne faktore β je

$$\hat{\beta} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y \tag{5}$$

dok je najbolji linearni nepristrasni prediktor BLUP (Best Linear Unbaised Predictor) za slučajne efekte α

$$\hat{\alpha} = GZ'V^{-1}(y - X\hat{\beta}). \tag{6}$$

Osnovni model

(Henderson, 1973) Najbolji linearni nepristrasni ocenjivač BLUE (Best Linear unbaised estimator) za fiksne faktore β je

$$\hat{\beta} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y \tag{5}$$

dok je najbolji linearni nepristrasni prediktor BLUP (Best Linear Unbaised Predictor) za slučajne efekte α

$$\hat{\alpha} = GZ'V^{-1}(y - X\hat{\beta}). \tag{6}$$

Najbolji prediktor podrazumeva minimizaciju srednje kvadratne greške (Mean squared error - MSE). Nepristrasnost podrazumeva da je $E(\hat{\alpha}) = \hat{\alpha}$. Ovaj način predviđanja ima dugu istoriju koju je započeo Henderson (1948) u toku svog istraživanja vezanog za uzgoj životinja.

Osnovni model

Osnovni model

Date aproksimacije za β i α zahtevaju izračunavanje matrice V^{-1} što nije uvek izvodljivo. Henderson (1950) je predložio da se do maksimalnog verodostojnog ocenjivača dođe diferenciranjem funkcije verodostojnosti po β i α i izjednačavanjem tih izvoda sa nulom.

Osnovni model

Date aproksimacije za β i α zahtevaju izračunavanje matrice V^{-1} što nije uvek izvodljivo. Henderson (1950) je predložio da se do maksimalnog verodostojnog ocenjivača dođe diferenciranjem funkcije verodostojnosti po β i α i izjednačavanjem tih izvoda sa nulom.

Na taj način se došlo do mešovitog modela jednačina (MME)

$$\begin{bmatrix} X'R^{-1}X & X'R^{-1}Z \\ Z'R^{-1}X & Z'R^{-1}Z + G^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'R^{-1}y \\ Z'R^{-1}y \end{bmatrix} \tag{7}$$

pod pretpostavkom da su R i G regularne matrice. Rešenja su upravo (5) i (6).

Osnovni model

Osnovni model

Neka je I jedinična matrica. Ako je A matrica srodstva i ako je

$$R = I\sigma_{\varepsilon}^2, \quad G = A\sigma_{\alpha}^2$$

Osnovni model

Neka je I jedinična matrica. Ako je A matrica srodstva i ako je

$$R = I\sigma_\varepsilon^2, \quad G = A\sigma_\alpha^2$$

tada (7) postaje

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}X'X & \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}X'Z \\ \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}Z'X & \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}Z'Z + \frac{1}{\sigma_\alpha^2}A^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}X'y \\ \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}Z'y \end{bmatrix}$$

Osnovni model

Neka je I jedinična matrica. Ako je A matrica srodstva i ako je

$$R = I\sigma_\varepsilon^2, \quad G = A\sigma_\alpha^2$$

tada (7) postaje

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}X'X & \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}X'Z \\ \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}Z'X & \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}Z'Z + \frac{1}{\sigma_\alpha^2}A^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}X'y \\ \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}Z'y \end{bmatrix}$$

i nakon množenja obe jednačine sa σ_ε^2, dobijamo

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + \delta A^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix} \tag{8}$$

gde je $\delta = \sigma_\varepsilon^2/\sigma_\alpha^2$.

Osnovni model

Osnovni model

Rešenje sistema (8) je

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + \delta A^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix}.$$

Osnovni model

Rešenje sistema (8) je

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + \delta A^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix}.$$

- Ako ne postoji inverzna matrica, tada se koristi uopštena inverzna matrica.
- Ako ne koristimo matricu srodstva, tada se A zameni sa jediničnom matricom.
- Ako se i α posmatra kao fiksni efekat, tada se ukloni δA^{-1}.

Primer 1.

Primer 1.

U tabeli su dati podaci o prirastu teladi pre prestanka sisanja (WWG).

Tele	Pol	Otac	Majka	WWG (kg)
4	m	1	-	2.6
5	f	3	2	0.1
6	f	1	2	1.0
7	m	4	5	3.0
8	m	3	6	1.0

Primer 1.

U tabeli su dati podaci o prirastu teladi pre prestanka sisanja (WWG).

Tele	Pol	Otac	Majka	WWG (kg)
4	m	1	-	2.6
5	f	3	2	0.1
6	f	1	2	1.0
7	m	4	5	3.0
8	m	3	6	1.0

Model koji opisuje ovo posmatranje je

$$y_{ij} = \beta_i + \alpha_j + \varepsilon_{ij}$$

gde je y_{ij} WWG od j-tog teleta i-tog pola, β_i je efekat i-tog pola, α_j slučajni efekat j-tog teleta i ε_{ij} efekat slučajnih grešaka.

Primer 1.

U tabeli su dati podaci o prirastu teladi pre prestanka sisanja (WWG).

Tele	Pol	Otac	Majka	WWG (kg)
4	m	1	-	2.6
5	f	3	2	0.1
6	f	1	2	1.0
7	m	4	5	3.0
8	m	3	6	1.0

Model koji opisuje ovo posmatranje je

$$y_{ij} = \beta_i + \alpha_j + \varepsilon_{ij}$$

gde je y_{ij} WWG od j-tog teleta i-tog pola, β_i je efekat i-tog pola, α_j slučajni efekat j-tog teleta i ε_{ij} efekat slučajnih grešaka.

U matričnom zapisu, model bi bio $y = X\beta + Z\alpha + \varepsilon$ kao i u (7).

Primer 1.

Primer 1.

Matrica X bi bila

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Primer 1.

Matrica X bi bila

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

gde se prva kolona odnosi na muški pol, a druga na ženski, tako da se jasno vidi koje tele je kog pola.

Matrica Z je

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

jer za prve tri životinje nemamo WWG.

Primer 1.

Primer 1.

Vektori su

$$\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$$

i

$$\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3, \hat{\alpha}_4, \alpha_5, \hat{\alpha}_6, \hat{\alpha}_7, \hat{\alpha}_8),$$

dok je matrica srodstva

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 & 0 & 0.25 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0.125 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 1 & 0.25 & 0.5 & 0.375 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0.25 & 0.25 & 1 & 0.25 & 0.5 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.5 & 0.5 & 0.25 & 1 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 & 0.125 & 0.375 & 0.5 & 0.25 & 1 \end{bmatrix}.$$

Primer 1.

Primer 1.

Neka je $\sigma_\alpha^2 = 0.2$ i neka je $\sigma_\varepsilon^2 = 0.4$, pa je tada $\delta = \sigma_\varepsilon^2/\sigma_\alpha^2 = 2$. Rešavamo sistem

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + 2A^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix},$$

gde je

$$y = \begin{bmatrix} 2.6 \\ 0.1 \\ 1.0 \\ 3.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}.$$

Primer 1.

Primer 1.

Rešenje je

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 2.144 \\ 0.602 \end{bmatrix}, \hat{\alpha} = \begin{bmatrix} 0.117 \\ -0.025 \\ -0.222 \\ 0.254 \\ -0.135 \\ 0.032 \\ 0.219 \\ -0.305 \end{bmatrix}$$

ili

Efekti	Rešenje
Pol	
m	2.144
f	0.602
Životinja	
1	0.117
2	−0.025
3	−0.222
4	0.254
5	−0.135
6	0.032
7	0.219
8	−0.305

Osnovni model sa ponavljanjem

Osnovni model sa ponavljanjem

Kada se posmatra ista osobina više puta, kao na primer, količina mleka u uzastopnim laktacijama za istu životinju, tada model ima oblik

$$y = X\beta + Z\alpha + Wpe + \varepsilon \tag{9}$$

Osnovni model sa ponavljanjem

Kada se posmatra ista osobina više puta, kao na primer, količina mleka u uzastopnim laktacijama za istu životinju, tada model ima oblik

$$y = X\beta + Z\alpha + Wpe + \varepsilon \tag{9}$$

gde su: y vektor posmatranja, β vektor fiksnih efekata, α vektor slučajnih efekata, pe vektor slučajnih stalnih uticaja životne sredine i neaditivnih genetski efekata, ε vektor slučajnih grešaka. X, Z i W su matrice vezane za fiksne, slučajne i stalne efekte, redom.

Osnovni model sa ponavljanjem

Kada se posmatra ista osobina više puta, kao na primer, količina mleka u uzastopnim laktacijama za istu životinju, tada model ima oblik

$$y = X\beta + Z\alpha + Wpe + \varepsilon \tag{9}$$

gde su: y vektor posmatranja, β vektor fiksnih efekata, α vektor slučajnih efekata, pe vektor slučajnih stalnih uticaja životne sredine i neaditivnih genetski efekata, ε vektor slučajnih grešaka. X, Z i W su matrice vezane za fiksne, slučajne i stalne efekte, redom.

Pretpostavka je da stalni efekti životne sredine i efekti slučajnih grešaka imaju varijanse σ^2_{pe} i σ^2_{ε}, redom, i da im je nula srednja vrednost.

$$Var(pe) = \sigma^2_{pe} I, \quad Var(\varepsilon) = \sigma^2_{\varepsilon} I = R, \quad Var(\alpha) = \sigma^2_{\alpha} A.$$

Osnovni model sa ponavljanjem

Kada se posmatra ista osobina više puta, kao na primer, količina mleka u uzastopnim laktacijama za istu životinju, tada model ima oblik

$$y = X\beta + Z\alpha + Wpe + \varepsilon \tag{9}$$

gde su: y vektor posmatranja, β vektor fiksnih efekata, α vektor slučajnih efekata, pe vektor slučajnih stalnih uticaja životne sredine i neaditivnih genetski efekata, ε vektor slučajnih grešaka. X, Z i W su matrice vezane za fiksne, slučajne i stalne efekte, redom.

Pretpostavka je da stalni efekti životne sredine i efekti slučajnih grešaka imaju varijanse σ^2_{pe} i σ^2_{ε}, redom, i da im je nula srednja vrednost.

$$Var(pe) = \sigma^2_{pe} I, \quad Var(\varepsilon) = \sigma^2_{\varepsilon} I = R, \quad Var(\alpha) = \sigma^2_{\alpha} A.$$

Tada je

$$Var(y) = \sigma^2_{\alpha} ZAZ' + \sigma^2_{pe} WW' + R.$$

Osnovni model sa ponavljanjem

gde je $\delta_1 = \sigma^2_{\varepsilon}/\sigma^2_{\alpha}$ i $\delta_1 = \sigma^2_{\varepsilon}/\sigma^2_{pe}$.

Osnovni model sa ponavljanjem

MME za BLUE ocenu vektora β i BLUP ocene vektora α i *pe* je

$$\begin{bmatrix} X'R^{-1}X & X'R^{-1}Z & X'R^{-1}W \\ Z'R^{-1}X & Z'R^{-1}Z+\frac{1}{\sigma_\alpha^2}A^{-1} & Z'R^{-1}W \\ W'R^{-1}X & W'R^{-1}Z & W'R^{-1}W+\frac{1}{\sigma_{pe}^2}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\alpha} \\ \hat{pe} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'R^{-1}y \\ Z'R^{-1}y \\ W'R^{-1}y \end{bmatrix}$$

gde je $\delta_1 = \sigma_\varepsilon^2/\sigma_\alpha^2$ i $\delta_1 = \sigma_\varepsilon^2/\sigma_{pe}^2$.

Osnovni model sa ponavljanjem

MME za BLUE ocenu vektora β i BLUP ocene vektora α i *pe* je

$$\begin{bmatrix} X'R^{-1}X & X'R^{-1}Z & X'R^{-1}W \\ Z'R^{-1}X & Z'R^{-1}Z + \frac{1}{\sigma_\alpha^2}A^{-1} & Z'R^{-1}W \\ W'R^{-1}X & W'R^{-1}Z & W'R^{-1}W + \frac{1}{\sigma_{pe}^2}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\alpha} \\ \hat{p}e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'R^{-1}y \\ Z'R^{-1}y \\ W'R^{-1}y \end{bmatrix}$$

odnosno, kada se zameni R sa $\sigma_\varepsilon^2 I$ i nakon množenja svih jednačina sa σ_ε^2, dobijamo

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z & X'R^{-1}W \\ Z'X & Z'Z + \delta_1 A^{-1} & Z'W \\ W'X & W'Z & W'W + \delta_2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\alpha} \\ \hat{p}e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \\ W'y \end{bmatrix} \tag{10}$$

gde je $\delta_1 = \sigma_\varepsilon^2/\sigma_\alpha^2$ i $\delta_1 = \sigma_\varepsilon^2/\sigma_{pe}^2$.

Osnovni model sa ponavljanjem

Osnovni model sa ponavljanjem

Rešenje modela (10) je

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\alpha} \\ \hat{p}e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z & X'R^{-1}W \\ Z'X & Z'Z + \delta_1 A^{-1} & Z'W \\ W'X & W'Z & W'W + \delta_2 I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \\ W'y \end{bmatrix}$$

Osnovni model sa ponavljanjem, Primer 2.

Osnovni model sa ponavljanjem, Primer 2.

Neka je data sledeća struktura

Krava	Otac	Majka	Sezona	Paritet	Prinos masti (kg)
4	1	2	1	1	201
4	1	2	3	2	280
5	3	2	1	1	150
5	3	2	4	2	200
6	1	5	2	1	160
6	1	5	3	2	190
7	3	4	1	1	180
7	3	4	3	2	250
8	1	7	2	1	285
8	1	7	4	2	300

Osnovni model sa ponavljanjem, Primer 2.

Neka je data sledeća struktura

Krava	Otac	Majka	Sezona	Paritet	Prinos masti (kg)
4	1	2	1	1	201
4	1	2	3	2	280
5	3	2	1	1	150
5	3	2	4	2	200
6	1	5	2	1	160
6	1	5	3	2	190
7	3	4	1	1	180
7	3	4	3	2	250
8	1	7	2	1	285
8	1	7	4	2	300

Pretpostavimo da je $\sigma_\alpha^2 = 20.0$, $\sigma_\varepsilon^2 = 28.0$ i $\sigma_{pe}^2 = 12.0$. Tada je fenotipska varijansa $\sigma_y^2 = \sigma_\alpha^2 + \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_{pe}^2 = 60$, $\delta_1 = 1.40$, $\delta_2 = 2.33$ i ponovljivost $(\sigma_\alpha^2 + \sigma_{pe}^2)/\sigma_y^2 = 0.53$.

Osnovni model sa ponavljanjem, Primer 2.

Osnovni model sa ponavljanjem, Primer 2.

Za fiksne faktore biramo sezonu i paritet. Matricu X dobijamo tako što se prve četiri kolone odnose na sezonu, a peta i šesta na paritet.

Osnovni model sa ponavljanjem, Primer 2.

Za fiksne faktore biramo sezonu i paritet. Matricu X dobijamo tako što se prve četiri kolone odnose na sezonu, a peta i šesta na paritet.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Osnovni model sa ponavljanjem, Primer 2.

Osnovni model sa ponavljanjem, Primer 2.

Slučajni efekti su prinosi masti. Prve tri kolone matrice Z imaju nule jer nemamo podatke o prinosu masti za prve tri krave.

Osnovni model sa ponavljanjem, Primer 2.

Slučajni efekti su prinosi masti. Prve tri kolone matrice Z imaju nule jer nemamo podatke o prinosu masti za prve tri krave.

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Osnovni model sa ponavljanjem, Primer 2.

Osnovni model sa ponavljanjem, Primer 2.

Matrica W se odnosi na slučajne efekte za krave kod kojih imamo podatke o prinosu masti.

Osnovni model sa ponavljanjem, Primer 2.

Matrica W se odnosi na slučajne efekte za krave kod kojih imamo podatke o prinosu masti.

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Osnovni model sa ponavljanjem, Primer 2.

Osnovni model sa ponavljanjem, Primer 2.

Matrica srodstva A je

Osnovni model sa ponavljanjem, Primer 2.

Matrica srodstva A je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0.25 & 0.625 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.25 & 0.25 & 0.125 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 & 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 1 & 0.25 & 0.375 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0.25 & 1 & 0.5 & 0.375 & 0.1875 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 & 0.375 & 0.5 & 1 & 0.3125 & 0.40625 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 & 0.5 & 0.375 & 0.3125 & 1 & 0.625 \\ 0.625 & 0.125 & 0.25 & 0.5 & 0.1875 & 0.40625 & 0.625 & 1.125 \end{bmatrix}$$

Osnovni model sa ponavljanjem, Primer 2.

Matrica srodstva A je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0.25 & 0.625 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.25 & 0.25 & 0.125 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 & 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 1 & 0.25 & 0.375 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0.25 & 1 & 0.5 & 0.375 & 0.1875 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 & 0.375 & 0.5 & 1 & 0.3125 & 0.40625 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 & 0.5 & 0.375 & 0.3125 & 1 & 0.625 \\ 0.625 & 0.125 & 0.25 & 0.5 & 0.1875 & 0.40625 & 0.625 & 1.125 \end{bmatrix}$$

i

$$y = [201 \;\; 280 \;\; 150 \;\; 200 \;\; 160 \;\; 190 \;\; 180 \;\; 250 \;\; 285 \;\; 300]'.$$

Osnovni model sa ponavljanjem, Primer 2.

Osnovni model sa ponavljanjem, Primer 2.

Pošto je determinanta matrica sistema 0, moramo odrediti uopštenu inverznu matricu. Kako je rang matrice koji je 17, a red matrice 19, sledi da dve vrste i kolone možemo da eliminišemo i da proverimo da li je i tada determinanta tako dobijene matrice 0.

Osnovni model sa ponavljanjem, Primer 2.

Pošto je determinanta matrica sistema 0, moramo odrediti uopštenu inverznu matricu. Kako je rang matrice koji je 17, a red matrice 19, sledi da dve vrste i kolone možemo da eliminišemo i da proverimo da li je i tada determinanta tako dobijene matrice 0.

Kada iz matrice sistema elimišemo recimo, prvu i treću vrstu i kolonu, zatim od dobijene matrice nađemo inverznu i nakon toga vratimo nule u novoj prvoj koloni i vrsti i novoj trećoj koloni i vrsti, dobijamo uopštenu inverznu matricu

Osnovni model sa ponavljanjem, Primer 2.

Osnovni model sa ponavljanjem, Primer 2.

Out[28]//MatrixForm=

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1.22088	0	0.0868217	-0.478883	-0.0252579	-0.116517	0.0890685	0.0274486	0.06701	0.0665927	-0.117576	0.0663438	-0.129724	0.0854125	0.0655692	-0.111136	0.08572	-0.125565
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.0868217	0	1.1855	-0.0420692	-0.48154	0.0281548	0.0119971	-0.0401519	0.0956999	-0.0777042	0.0427721	0.051249	-0.0753141	0.0766638	-0.11688	0.0810562	0.0971796	-0.138019
0	-0.478883	0	-0.0420692	0.848013	0.473287	-0.21316	-0.274782	-0.226344	-0.397758	-0.371558	-0.328151	-0.4174	-0.338862	-0.121335	-0.123719	-0.0429499	-0.112269	-0.0282981
0	-0.0252579	0	-0.48154	0.473287	0.8558	-0.271029	-0.243953	-0.199304	-0.409234	-0.313839	-0.39229	-0.411362	-0.360626	-0.117835	-0.0507392	-0.119827	-0.116853	-0.0233165
0	-0.116517	0	0.0281548	-0.21316	-0.271029	0.639217	0.0236311	0.0514379	0.308302	0.0842875	0.344697	0.184555	0.376994	-0.0305573	0.0663368	-0.0204663	0.0265568	-0.04187
0	0.0890685	0	0.0119971	-0.274782	-0.243953	0.0236311	0.679177	0.0114778	0.33772	0.323903	0.185174	0.207501	0.141474	-0.0361626	-0.032554	0.0136888	0.0239383	0.0310895
0	0.0274486	0	-0.0401519	-0.226344	-0.199304	0.0514379	0.0114778	0.65137	0.068264	0.306096	0.184415	0.32223	0.195818	0.0667198	-0.0337828	0.00677753	-0.0504951	0.0107805
0	0.06701	0	0.0956999	-0.397758	-0.409234	0.308302	0.33772	0.068264	0.60943	0.254292	0.305934	0.35581	0.329302	-0.0950465	0.0467785	0.0295645	0.0220086	-0.0033051
0	0.0665927	0	-0.0777042	-0.371558	-0.313839	0.0842875	0.323903	0.306096	0.254292	0.588704	0.32897	0.312584	0.240052	0.0408027	-0.0956095	-0.00903132	0.0138987	0.0499394
0	-0.117576	0	0.0427721	-0.328151	-0.39229	0.344697	0.185174	0.184415	0.305934	0.32897	0.617596	0.285414	0.337991	0.025055	0.00455276	-0.091656	0.034526	0.0275222
0	0.0663438	0	0.051249	-0.4174	-0.411362	0.184555	0.207501	0.32223	0.35581	0.312584	0.285414	0.613531	0.386971	0.0270324	0.0351562	0.044213	-0.0919155	-0.0144862
0	-0.129724	0	-0.0753141	-0.338862	-0.360626	0.376994	0.141474	0.195818	0.329302	0.240052	0.337991	0.386971	0.659441	0.00943465	0.0680071	0.0353609	-0.0171818	-0.0956208
0	0.0854125	0	0.0766638	-0.121335	-0.117835	-0.0305573	-0.0361626	0.0667198	-0.0950465	0.0408027	0.025055	0.0270324	0.00943465	0.32983	0.0186695	0.0239187	0.0427167	0.0134365
0	0.0655692	0	-0.11688	-0.123719	-0.0507392	0.0663368	-0.032554	-0.0337828	0.0467785	-0.0956095	0.00455276	0.0351562	0.0680071	0.0186695	0.342129	0.0230269	0.0240336	0.0207127
0	-0.111136	0	0.0810562	-0.0429499	-0.119827	-0.0204663	0.0136888	0.00677753	0.0295645	-0.00903132	-0.091656	0.044213	0.0353609	0.0239187	0.0230269	0.336283	0.0171579	0.0281851
0	0.08572	0	0.0971796	-0.112269	-0.116853	0.0265568	0.0239383	-0.0504951	0.0220086	0.0138987	0.034526	-0.0919155	-0.0171818	0.0427167	0.0240336	0.0171579	0.326066	0.018597
0	-0.125565	0	-0.138019	-0.0282981	-0.0233165	-0.04187	0.0310895	0.0107805	-0.0033051	0.0499394	0.0275222	-0.0144862	-0.0956208	0.0134365	0.0207127	0.0281851	0.018597	0.34764

Osnovni model sa ponavljanjem, Primer 2.

Out[28]//MatrixForm=

$$
\left(\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1.22088 & 0 & 0.0868217 & -0.478883 & -0.0252579 & -0.116517 & 0.0890685 & 0.0274486 & 0.06701 & 0.0665927 & -0.117576 & 0.0663438 & -0.129724 & 0.0854125 & 0.0655692 & -0.111136 & 0.08572 & -0.125565 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.0868217 & 0 & 1.1855 & -0.0420692 & -0.48154 & 0.0281548 & 0.0119971 & -0.0401519 & 0.0956999 & -0.0777042 & 0.0427721 & 0.051249 & -0.0753141 & 0.0766638 & -0.11688 & 0.0810562 & 0.0971796 & -0.138019 \\
0 & -0.478883 & 0 & -0.0420692 & 0.848013 & 0.473287 & -0.21316 & -0.274782 & -0.226344 & -0.397758 & -0.371558 & -0.328151 & -0.4174 & -0.338862 & -0.121335 & -0.123719 & -0.0429499 & -0.112269 & -0.0282981 \\
0 & -0.0252579 & 0 & -0.48154 & 0.473287 & 0.8558 & -0.271029 & -0.243953 & -0.199304 & -0.409234 & -0.313839 & -0.39229 & -0.411362 & -0.360626 & -0.117835 & -0.0507392 & -0.119827 & -0.116853 & -0.0233165 \\
0 & -0.116517 & 0 & 0.0281548 & -0.21316 & -0.271029 & 0.639217 & 0.0236311 & 0.0514379 & 0.308302 & 0.0842875 & 0.344697 & 0.184555 & 0.376994 & -0.0305573 & 0.0663368 & -0.0204663 & 0.0265568 & -0.04187 \\
0 & 0.0890685 & 0 & 0.0119971 & -0.274782 & -0.243953 & 0.0236311 & 0.679177 & 0.0114778 & 0.33772 & 0.323903 & 0.185174 & 0.207501 & 0.141474 & -0.0361626 & -0.032554 & 0.0136888 & 0.0239383 & 0.0310895 \\
0 & 0.0274486 & 0 & -0.0401519 & -0.226344 & -0.199304 & 0.0514379 & 0.0114778 & 0.65137 & 0.068264 & 0.306096 & 0.184415 & 0.32223 & 0.195818 & 0.0667198 & -0.0337828 & 0.00677753 & -0.0504951 & 0.0107805 \\
0 & 0.06701 & 0 & 0.0956999 & -0.397758 & -0.409234 & 0.308302 & 0.33772 & 0.068264 & 0.60943 & 0.254292 & 0.305934 & 0.35581 & 0.329302 & -0.0950465 & 0.0467785 & 0.0295645 & 0.0220086 & -0.0033051 \\
0 & 0.0665927 & 0 & -0.0777042 & -0.371558 & -0.313839 & 0.0842875 & 0.323903 & 0.306096 & 0.254292 & 0.588704 & 0.32897 & 0.312584 & 0.240052 & 0.0408027 & -0.0956095 & -0.00903132 & 0.0138987 & 0.0499394 \\
0 & -0.117576 & 0 & 0.0427721 & -0.328151 & -0.39229 & 0.344697 & 0.185174 & 0.184415 & 0.305934 & 0.32897 & 0.617596 & 0.285414 & 0.337991 & 0.025055 & 0.00455276 & -0.091656 & 0.034526 & 0.0275222 \\
0 & 0.0663438 & 0 & 0.051249 & -0.4174 & -0.411362 & 0.184555 & 0.207501 & 0.32223 & 0.35581 & 0.312584 & 0.285414 & 0.613531 & 0.386971 & 0.0270324 & 0.0351562 & 0.044213 & -0.0919155 & -0.0144862 \\
0 & -0.129724 & 0 & -0.0753141 & -0.338862 & -0.360626 & 0.376994 & 0.141474 & 0.195818 & 0.329302 & 0.240052 & 0.337991 & 0.386971 & 0.659441 & 0.00943465 & 0.0680071 & 0.0353609 & -0.0171818 & -0.0956208 \\
0 & 0.0854125 & 0 & 0.0766638 & -0.121335 & -0.117835 & -0.0305573 & -0.0361626 & 0.0667198 & -0.0950465 & 0.0408027 & 0.025055 & 0.0270324 & 0.00943465 & 0.32983 & 0.0186695 & 0.0239187 & 0.0427167 & 0.0134365 \\
0 & 0.0655692 & 0 & -0.11688 & -0.123719 & -0.0507392 & 0.0663368 & -0.032554 & -0.0337828 & 0.0467785 & -0.0956095 & 0.00455276 & 0.0351562 & 0.0680071 & 0.0186695 & 0.342129 & 0.0230269 & 0.0240336 & 0.0207127 \\
0 & -0.111136 & 0 & 0.0810562 & -0.0429499 & -0.119827 & -0.0204663 & 0.0136888 & 0.00677753 & 0.0295645 & -0.00903132 & -0.091656 & 0.044213 & 0.0353609 & 0.0239187 & 0.0230269 & 0.336283 & 0.0171579 & 0.0281851 \\
0 & 0.08572 & 0 & 0.0971796 & -0.112269 & -0.116853 & 0.0265568 & 0.0239383 & -0.0504951 & 0.0220086 & 0.0138987 & 0.034526 & -0.0919155 & -0.0171818 & 0.0427167 & 0.0240336 & 0.0171579 & 0.326066 & 0.018597 \\
0 & -0.125565 & 0 & -0.138019 & -0.0282981 & -0.0233165 & -0.04187 & 0.0310895 & 0.0107805 & -0.0033051 & 0.0499394 & 0.0275222 & -0.0144862 & -0.0956208 & 0.0134365 & 0.0207127 & 0.0281851 & 0.018597 & 0.34764
\end{array}\right)
$$

koja se množi sa slobodnim koeficijentima sistema (10), tj. sa

$$[X'y \quad Z'y \quad W'y]'$$

$$= [531 \;\; 445 \;\; 720 \;\; 500 \;\; 976 \;\; 1220 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 481 \;\; 350 \;\; 350 \;\; 430 \;\; 585 \;\; 481 \;\; 350 \;\; 350 \;\; 430 \;\; 585]'.$$

Osnovni model sa ponavljanjem, Primer 2.

Osnovni model sa ponavljanjem, Primer 2.

Rešenje sistema je

Efekti	Rešenje
Sezona	
1	0.000
2	44.065
3	0.000
4	0.013
Paritet	
1	175.472
2	241.893
Životinja	
1	10.148
2	−3.084
3	−7.063
4	13.581
5	−18.207
6	−18.387
7	9.328
8	24.194
Krava (stalni uticaji)	
4	8.417
5	-7.146
6	-17.229
7	-1.390
8	17.347